PITAGORAS ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

ECUACIONES

Ecuación polinomial

Es aquella ecuación que presenta la siguiente forma general

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots a_{n-1}x + a_n = 0$$

donde:

x es la incógnita

$a_0;\ a_1;\ a_2; \ldots;\ a_n$ son los coeficientes $(a_0 \neq 0)$

NOTA: El grado del polinomio determina el grado de la ecuación

Ejemplos

- $3x + 2 = 0$ Ecuación lineal o de primer grado

I) Ecuación lineal

Llamadas ecuaciones polinomiales de primer grado.

Su forma general es: $Ax + B = 0 \quad ; A \neq 0$

Resolución

Despejamos las variables en un miembro y en el otro miembro las constantes; de ahí se encuentra el valor de la variable.

Ejemplo

$$3x + 2 = 0 \longrightarrow 3x = -2 \longrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ C.S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

NOTA: Resolver una ecuación es encontrar su C.S

ECUACIONES

II) Ecuación cuadrática

Llamadas ecuaciones polinomiales de segundo grado.

Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; a \neq 0$$

Resolución

1) Por factorización:

a) Se factoriza el polinomio cuadrático.

b) Se utiliza el siguiente teorema.

$$ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

c) Se encuentran las soluciones de la ecuación.

d) Se encuentra el conjunto solución.

Ejemplo 1

Resolver : $3x^2 + x - 10 = 0$

Resolución

Factorizando $3x^2 + x - 10 = 0$

$$\begin{array}{ll} 3x & -5 \\ x & +2 \end{array}$$

$$(3x - 5)(x + 2) = 0$$

$$(3x - 5) = 0 \quad \vee \quad (x + 2) = 0$$

$$x = \frac{5}{3} \quad \vee \quad x = -2$$

$$\therefore \quad C.S = \left\{\frac{5}{3} ; -2\right\}$$

ECUACIONES

Ejemplo 2

Resolver : $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Resolución

Factorizando $4x^2 - 28x + 49 = 0$

$2x \qquad -7$

$2x \qquad -7$

$$(2x-7)(2x-7) = 0$$

$$(2x-7) = 0 \quad \vee \quad (2x-7) = 0$$

$$x = \frac{7}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad C.S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

2) Por completación de cuadrados:

Ejemplo

Resolver : $4x^2 - 4x - 5 = 0$

Resolución

Despejando : $4x^2 - 4x + 1 = 5 + 1$

Se forma T.C.P $(2x-1)^2$

$$(2x-1)^2 = 6$$

Teorema: $x^2 = a \rightarrow x = \sqrt{a} \quad \vee \quad x = -\sqrt{a}$

$$2x - 1 = \sqrt{6} \quad \vee \quad 2x - 1 = -\sqrt{6}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1-\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore \quad C.S = \left\{\frac{1+\sqrt{6}}{2}; \frac{1-\sqrt{6}}{2}\right\}$$

ECUACIONES

3) Por fórmula general:

Tenemos: $ax^2 + bx + c = 0 \quad ; a \neq 0$

$$\xrightarrow{\div a} \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \longrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{T.C.P.}} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \times \frac{4a}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Teorema: $x^2 = a \rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1

Resolver : $2x^2 + 4x - 3 = 0$

Resolución

Tenemos

$$\boxed{2}x^2 \ \boxed{+4}x \ \boxed{-3} = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Como: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{\overset{2}{\cancel{-4}} \pm \overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{10}}{\underset{2}{\cancel{4}}}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$\sqrt{40} = \sqrt{(4)(10)} = \sqrt{4}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

Luego:

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$$

Entonces

$$C.S = \left\{\frac{-2 + \sqrt{10}}{2}; \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}\right\}$$

Ejemplo 2

Resolver : $x^2 - 6x + 10 = 0$

Resolución

Tenemos

$$\boxed{1}x^2 \ \boxed{-6}x \ \boxed{+10} = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Como: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 2i}{2}$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$$

Luego:

$$x_1 = \frac{6 + 2i}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{6 - 2i}{2}$$

$$x_1 = 3 + i \quad \vee \quad x_2 = 3 - i$$

Entonces

$$C.S = \{3 + i; 3 - i\}$$

ECUACIONES

Resumen:

Las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esto es:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donde: $\Delta = b^2 - 4ac$

Δ se le denomina discriminante

NOTA:

Si los coeficientes de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son números reales, entonces:

I) Si $\Delta > 0$: La ecuación presenta dos raíces reales y diferentes.

$$C.S = \{x_1;\ x_2\} \ ;\ \{x_1;\ x_2\} \subset \mathbb{R}$$

II) Si $\Delta = 0$: La ecuación presenta dos raíces reales e iguales.

$$x_1 = x_2 = \alpha \longrightarrow C.S = \{\alpha\}$$

III) Si $\Delta < 0$: La ecuación presenta dos raíces no reales (complejas conjugadas).

$$x_1 = m + ni \quad ; \quad x_2 = m - ni$$

II.3) Teorema de Cardano - Viette:

Si $x_1;\ x_2$ son las raíces de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; a \neq 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$ Suma de raíces

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$ Producto de raíces

NOTA: Para calcular la diferencia de raíces.

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 . x_2$$

Ejemplo:

Si $\alpha;\ \beta$ son las raíces de la ecuación $x^2 + px + 36 = 0$

tal que: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{5}{12}$. Halle el valor de p.

Resolución: Por el teorema de Cardano – Viette, tenemos:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{p}{1} \longrightarrow \alpha + \beta = -p$$

Como: $$\alpha . \beta = \frac{c}{a} = \frac{36}{1} \longrightarrow \alpha . \beta = 36$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha . \beta} \longrightarrow \frac{5}{12} = \frac{-p}{36} \longrightarrow p = -15$$

ECUACIONES

Raíces simétricas: Decimos que x_1; x_2 son raíces simétricas si

$$\boxed{x_1 + x_2 = 0}$$

Teorema: Si una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; a \neq 0$$

tiene raíces simétricas, entonces $\boxed{b = 0}$

Ejemplo:

Si la ecuación $2x^2 + (a-2)x + (a+4) = 0$

tiene raíces simétricas, calcule a

Como la ecuación tiene raíces simétricas, por teorema:

$$a - 2 = 0 \longrightarrow a = 2$$

Raíces recíprocas: Decimos que x_1; x_2 son raíces simétricas si

$$\boxed{x_1 . x_2 = 1}$$

Teorema: Si una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; a \neq 0$$

tiene raíces simétricas, entonces $\boxed{a = c}$

Ejemplo:

Si la ecuación $(2n+3)x^2 + (3n-4)x + (n+8) = 0$

tiene raíces simétricas, calcule n

Como la ecuación tiene raíces recíprocas, por teorema:

$$2n + 3 = n + 8 \longrightarrow n = 5$$

II.4) Reconstrucción de ecuación cuadrática

La ecuación cuadrática cuyas raíces son $x_1;\ x_2$ es:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{S}x + \underbrace{x_1 x_2}_{P} = 0$$

Nos queda:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Donde:

$S = x_1 + x_2$ Suma de raíces

$P = x_1 . x_2$ Producto de raíces

Ejemplo:

Encuentre la ecuación cuadrática cuyas raíces son

$$x_1 = 1 + \sqrt{5} \quad ; \quad x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

Resolución:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + \cancel{\sqrt{5}} + 1 - \cancel{\sqrt{5}} = 2$$

$$P = x_1 . x_2 = (1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5}) = 1^2 - \sqrt{5}^2 = -4$$

La ecuación cuadrática pedida es: $x^2 - Sx + P = 0$

$$x^2 - 2x + (-4) = 0$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

II.4) Ecuaciones equivalentes

Se llaman ecuaciones equivalentes, si sus conjuntos soluciones son iguales.

Ejemplo: Dadas las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 10 = 0 \\ x^2 - 10x + 25 = 0 \end{cases}$$

Tenemos que:

$2x - 10 = 0 \longrightarrow C.S = \{5\}$

$x^2 - 10x + 25 = 0 \longrightarrow (x-5)^2 = 0$

$\longrightarrow x - 5 = 0 \longrightarrow C.S = \{5\}$

Tienen el mismo C.S

La ecuaciones son equivalentes

Teorema: Si las ecuaciones

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; a.b.c \neq 0$$

$$mx^2 + nx + p = 0 \quad ; m.n.p \neq 0$$

Son equivalentes, entonces $\boxed{\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{p}}$

Ejemplo: Si las ecuaciones:

$$x^2 + bx + 3 = 0 \quad \wedge \quad 2x^2 + 8x + c = 0$$

Son equivalentes, calcule $b.c$

Por teorema: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{b}{8} = \dfrac{3}{c} \longrightarrow \begin{matrix} b = 4 \\ c = 6 \end{matrix}$

$\longrightarrow b.c = 24$

ECUACIONES

ECUACIÓN CÚBICA

Tienen la siguiente forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \; ; \; a \neq 0$$

Para resolverlo:

I) Se factoriza (generalmente por el método de divisores binómicos)

II) Se aplica el teorema

$$\boxed{ab = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0 \;\vee\; b = 0}$$

III) Se encuentran las raíces

IV) Se encuentran su conjunto solución

Ejemplo Resolver: $x^3 - 3x + 2 = 0$

Resolución: Factorizando:

	1	0	−3	2
1	↓	1	1	−2
	1	1	−2	0

$$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \longrightarrow \underbrace{(x-1)}_{=0}\underbrace{(x-1)}_{=0}\underbrace{(x+2)}_{=0} = 0$$

$$\begin{matrix} x & & +2 \\ & \times & \\ x & & -1 \end{matrix}$$

$\longrightarrow$ $(x-1) = 0 \;\vee\; (x-1) = 0 \;\vee\; (x+2) = 0$

$\longrightarrow$ Raíces: $1;\; 1;\; -2$ $\quad (3\ raíces)$

$\longrightarrow$ C.S = $\{1; -2\}$ $\quad (2\ soluciones)$

ECUACIONES

Ejemplo Resolver: $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

Resolución: Factorizando:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\begin{array}{ll} x & -2 \\ x & -1 \end{array}$$

$\longrightarrow$ $x(x-2)(x-1) = 0$

$\longrightarrow$ $x = 0 \;\vee\; (x-2) = 0 \;\vee\; (x-1) = 0$

$\longrightarrow$ Raíces: $0;\; 2;\; 1$ $\quad (3\ raíces)$

$\longrightarrow$ C.S = $\{0; 2; 1\}$ $\quad (3\ soluciones)$

Ejemplo Resolver: $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$

Resolución: Factorizando:

	1	−2	4	−8
2	↓	2	0	8
	1	0	4	0

$\longrightarrow (x-2)(x^2+4) = 0 \longrightarrow (x-2) = 0 \;\vee\; (x^2+4) = 0$

$x = 2 \quad \vee \quad x^2 = -4$

$x = 2 \quad \vee \quad x = 2i \quad \vee \quad x = -2i$

Raíces: $2;\; 2i;\; -2i$ $\quad (3\ raíces)$

C.S = $\{2; 2i; -2i\}$ $\quad (3\ soluciones)$

TEOREMA DE CARDANO - VIETTE

Si $x_1;\ x_2;\ x_3$ son las raíces de la ecuación

$$\xrightarrow{\quad + \quad - \quad + \quad -}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ ;\ a \neq 0$$

Se cumple que:

$$I)\ x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$ **(De 1 en 1)**

$$II)\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$$ **(De 2 en 2)**

$$III)\ x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$$ **(De 3 en 3)**

Ejemplo 1 Si $m; n; p$ son las raíces de la ecuación

$$4x^3 + 7x^2 - 5x - 9 = 0$$

$$\underset{a}{\uparrow} \quad \underset{b}{\uparrow} \quad \underset{c}{\uparrow} \quad \underset{d}{\uparrow}$$

Entonces, por el teorema de Cardano - Viette:

$$I)\ m + n + p = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{4}$$

$$II)\ mn + mp + np = \frac{c}{a} = \frac{(-5)}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$III)\ m.n.p = -\frac{d}{a} = -\frac{(-9)}{4} = \frac{9}{4}$$

TEOREMAS DE LA PARIDAD DE RAÍCES

1) En toda ecuación polinomial con coeficientes racionales y grado $n \geq 2$, se cumple que:

$$a + \sqrt{b} \text{ es raíz} \leftrightarrow a - \sqrt{b} \text{ es raíz}$$

Donde:

$a \wedge b$ *son racionales* ; $\sqrt{b}$ es irracional

Ejemplos: Sea una ecuación polinomial con coeficientes racionales y grado $n \geq 2$, donde:

$i)$ *si* $2 + \sqrt{3}$ es raíz $\leftrightarrow 2 - \sqrt{3}$ es raíz

$ii)$ *si* $4 - \sqrt{5}$ es raíz $\leftrightarrow 4 + \sqrt{5}$ es raíz

$iii)$ *si* $\sqrt{7}$ es raíz $\leftrightarrow -\sqrt{7}$ es raíz

Ejemplos: Encuentre una ecuación de segundo grado, con coeficientes enteros, si una raíz es $3 + \sqrt{5}$

Resolución:

Como los coeficientes son enteros, eso implica que son racionales ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

Como una raíz es $3 + \sqrt{5}$, por paridad otra raíz es $3 - \sqrt{5}$.

Por reconstrucción, tenemos

$$S = (3 + \cancel{\sqrt{5}}) + (3 - \cancel{\sqrt{5}}) = 6$$

$$P = (3 + \sqrt{5}).(3 - \sqrt{5}) = 3^2 - \sqrt{5}^2 = 9 - 5 = 4$$

La ecuación es: $x^2 - Sx + P = 0$

$$\boxed{x^2 - 6x + 4 = 0}$$

ECUACIONES

2) En toda ecuación polinomial con coeficientes reales y grado $n \geq 2$, se cumple que:

$$a + bi \text{ es raíz} \leftrightarrow a - bi \text{ es raíz}$$

Donde:

$a \wedge b \; son \; reales$; $b \neq 0$; i es la unidad imaginaria

Ejemplos:

Sea una ecuación polinomial con coeficientes reales y grado $n \geq 2$, donde:

$i)\; si\; 7 + 4i$ es raíz $\leftrightarrow 7 - 4i$ es raíz

$ii)\; si\; 6 - i$ es raíz $\leftrightarrow 6 + i$ es raíz

$iii)\; si\; 3i$ es raíz $\leftrightarrow -3i$ es raíz

Ejemplos:

Encuentre una ecuación de segundo grado, con coeficientes enteros, si una raíz es $2 + i$

Resolución:

Como los coeficientes son enteros, eso implica que son reales ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

Como una raíz es $2 + i$, por paridad otra raíz es $2 - i$.

Por reconstrucción, tenemos

$$S = (2 + \cancel{i}) + (2 - \cancel{i}) = 4$$

$$P = (2 + i).(2 - i) = 2^2 - i^2 = 4 - (-1) = 5$$

La ecuación es:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$\boxed{x^2 - 4x + 5 = 0}$$

Ejemplo:

Si $1+\sqrt{3}$ es raíz de la ecuación

$$2x^3-3x^2+ax+b=0$$

Donde a, b son enteros. Encuentre la raíz racional de la ecuación

Resolución:

Como la ecuación es cúbica (tercer grado), presenta 3 raíces: $x_1;\ x_2;\ x_3$

Como los coeficientes son enteros, entonces son racionales $(\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q})$

Si $x_1 = 1+\sqrt{3}$ es raíz entonces por paridad

$x_2 = 1-\sqrt{3}$ es raíz

Por el teorema de Cardano – Viette, tenemos

$$x_1+x_2+x_3 = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

Como:

$$x_1 = 1+\sqrt{3} \quad \wedge \quad x_2 = 1-\sqrt{3}$$

$$x_1+x_2 = 1+\cancel{\sqrt{3}}+1-\cancel{\sqrt{3}} = 2$$

Luego: $\underbrace{x_1+x_2}_{=2}+x_3 = \frac{3}{2}$

$$\boxed{x_3 = -\frac{1}{2}}$$ (Raíz racional)

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

1. Resuelva la siguiente ecuación.
$(x-2)^2+(x+1)^2=(x-1)^2+x+3$

A) $CS=\left\{\frac{1+\sqrt{2}i}{2};\ \frac{1-\sqrt{2}i}{2}\right\}$

B) $CS=\left\{\frac{1+\sqrt{3}i}{3};\ \frac{1-\sqrt{3}i}{3}\right\}$

C) $CS=\left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2};\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}$

D) $CS=\left\{-\frac{1+\sqrt{3}i}{2};\ -\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$

E) $CS=\left\{\frac{1+\sqrt{3}i}{2};\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$

SOLUCIÓN:

$$x^2-4x+4+x^2+2x+1=x^2-2x+1+x+3$$

$$\rightarrow 2x^2-2x+5=x^2-x+4$$

$$x^2-x+1=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

por fórmula:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \vee x_2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$CS=\left\{\frac{1+\sqrt{3}i}{2};\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

2. Determine el valor de la suma de los inversos de las raíces de la ecuación $2x^2-3x+4=0$.

A) $-3/4$ B) $4/3$ C) $3/4$
D) $-4/3$ E) 0

SOLUCIÓN

$$\overset{a}{2}x^2\overset{b}{-3}x+\overset{c}{4}=0 \quad ; CS=\{\alpha;\beta\}$$

Cardano:

$$\alpha+\beta=\frac{-(-3)}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\alpha\beta=\frac{4}{2}=2$$

Se pide:

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=\frac{3}{4}$$ C

3. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2-x-2=0$, determine el valor de T.

$$T=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$$

A) $-3{,}6$ B) $-3{,}5$ C) $-6{,}5$
D) $-2{,}5$ E) $2{,}6$

SOLUCIÓN:

$$x^2-x-2=0$$

$$\begin{matrix} x & & -2 \\ x & & 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow (x-2)(x+1)=0$$

$$x-2=0 \vee x+1=0$$

$$x_1=2 \vee x_2=-1$$

Se pide

$$T=\frac{2}{-1}+\frac{-1}{2}$$

$$T=-\frac{2}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\therefore T=-\frac{5}{2}=-2{,}5$$

4. Si las ecuaciones cuadráticas

$$\begin{cases}(m-n)x^2+(m+n)x+n-41=0\\ 6x^2+7x-20=0\end{cases}$$

tienen las mismas raíces, determine el valor de m/n.

A) $-1/3$ B) 13 C) 14
D) -14 E) $1/13$

SOLUCIÓN :

$$\begin{cases}(m-n)x^2+(m+n)x+n-41=0\\ 6x^2+7x-20=0\end{cases}$$

por teorema:

$$\underbrace{\frac{m-n}{6}=\frac{m+n}{7}}=\frac{n-41}{-20}$$

$$7m-7n=6m+6n$$

$$m=13n$$

$$\therefore \frac{m}{n}=13$$

5. Dado el trinomio
$f_{(x)}=(r+3)x^2-2(r+3)x+(r^2+1)$,
indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto a las siguientes proposiciones.

I. $f_{(x)}$ tiene raíces simétricas $\leftrightarrow r=-3$
II. $f_{(x)}$ tiene raíces recíprocas $\leftrightarrow r=2 \vee r=-1$
III. La suma de raíces de $f_{(x)}$ es 2; $\forall r \in \mathbb{R}$.

A) VVV B) VFV C) FVV
D) FVF E) FFF

III) $x_1+x_2=\dfrac{-(-2(r+3))}{r+3}=\dfrac{2\cancel{(r+3)}}{\cancel{r+3}}$; $r\neq-3$ (F)

$\rightarrow r=-3$

$\rightarrow x_1+x_2=2$; $\forall r\in\mathbb{R}-\{-3\}$

SOLUCIÓN: $f(x)=(r+3)x^2-2(r+3)x+(r^2+1)$; $r+3\neq0$

$r=-3$

I) $-2(r+3)=0 \rightarrow r+3=0 \rightarrow r=-3$ (F)

II) $r+3=r^2+1 \rightarrow 0=r^2-r-2 \rightarrow (r-2)(r+1)=0$ $\begin{cases} r=2 \\ \vee \\ r=-1 \end{cases}$ (V)

$r \quad -2$
$r \quad 1$

6. Sea la ecuación $x^2+bx+c=0$, indique la relación que cumplen b y c para que sus raíces se diferencien en $\sqrt{5c}$.

A) $b^2=c$ B) $b+1=x$ C) $b=9c$

D) $b^2=9c$ E) $c^2=3b$

SOLUCIÓN: $x^2+bx+c=0$

$x_1-x_2=\sqrt{5c}$ (dato)

Por teoría:

$(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=4x_1x_2$ ..... (α)

Cardano:

$x_1+x_2=\frac{-b}{1}=-b$

$x_1x_2=\frac{c}{1}=c$

en (α):

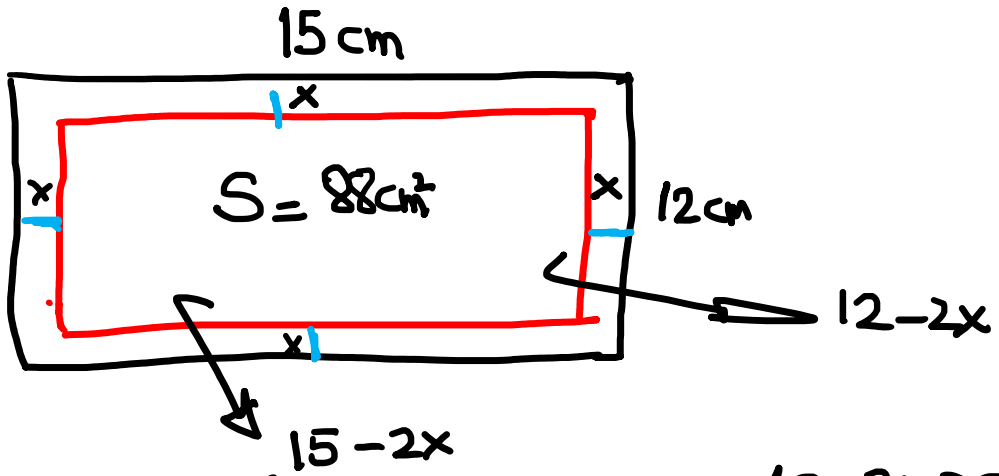
$(-b)^2-(\sqrt{5c})^2=4c$

$b^2-5c=4c$

$\therefore b^2=9c$

7. Las dimensiones exteriores de un marco de fotografía son 12 por 15 cm. Si se sabe que su ancho permanece constante, halle el ancho del marco, tomando en cuenta que el área de la fotografía es de 88 cm^2.

A) 11 cm B) 2,5 cm C) 2 cm
D) 4 cm E) 3,5 cm



Por dato: $(15-2x)(12-2x) = 88$

$180 - 30x - 24x + 4x^2 = 88$

$4x^2 - 54x + 92 = 0$

$2x^2 - 27x + 46 = 0$

$2x \quad -23$
$x \quad -2$

$\rightarrow (2x-23)(x-2) = 0$

$\cancel{x = \frac{23}{2}} \vee x = 2$

$\therefore x = 2\,cm$

$12 - 2x > 0 \wedge 15 - 2x > 0$

$x < 6 \wedge x < 7{,}5$

$\boxed{x < 6}$

8. Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación cuadrática $234x^2+233x+232=0$, determine el equivalente reducido de M.

$$M = 234\left(x_1^5 + x_2^5\right) + 233\left(x_1^4 + x_2^4\right) + 232\left(x_1^3 + x_2^3\right)$$

A) 2 B) −2 C) 3
D) 0 E) −3

SOLUCIÓN:

$234x^2 + 233x + 232 = 0$; $CS = \{x_1; x_2\}$

definición de raíz:

x_1 es una raíz $\rightarrow (234x_1^2 + 233x_1 + 232 = 0)\,x_1^3$

x_2 " " " $\rightarrow (234x_2^2 + 233x_2 + 232 = 0)\,x_2^3$

$$\left.\begin{aligned} 234x_1^5 + 233x_1^4 + 232x_1^3 &= 0 \\ 234x_2^5 + 233x_2^4 + 232x_2^3 &= 0 \end{aligned}\right\} +$$

$$\underbrace{234(x_1^5 + x_2^5) + 233(x_1^4 + x_2^4) + 232(x_1^3 + x_2^3)}_{M} = 0$$

$\therefore M = 0$ ✓

9. Calcule el valor de $2m-3$ si se conoce que las ecuaciones cuadráticas $3mx^2+x-2=0$ y $45x^2+(3m-2)x-2=0$ tienen una raíz en común y la raíz restante de la segunda ecuación es el cuadrado de la raíz restante de la primera. Considere $m \in \mathbb{Z}$.

A) 17 B) 5 C) 7
D) 9 E) 19

Por definición de raíz.

$$3m\frac{m^3}{15^2}+\frac{m}{15}-2=0$$

$$\frac{m^3}{75}+\frac{5m}{75}-\frac{150}{75}=0$$

$$m^3+5m-150=0 \rightarrow m=5 \checkmark$$

$$\therefore 2(5)-3=7$$

SOLUCIÓN:

$$3mx^2+x-2=0 \; ; \; CS=\{\alpha;\theta\} \rightarrow \alpha\theta=-\frac{2}{3m}$$

$$45x^2+(3m-2)x-2=0 \; ; \; CS=\{\alpha;\theta^2\} \rightarrow \alpha\theta^2=\frac{-2}{45}$$

$$\frac{\alpha\theta^2}{\alpha\theta}=\frac{\frac{-2}{45}}{\frac{-2}{3m}} \rightarrow \theta=\frac{m}{15}$$

10. ¿Qué cantidad es necesaria aumentar a las raíces de la ecuación?

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)x^2+2(a+b)x+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1$$

para que las cantidades resultantes sean iguales en magnitud pero de signos opuestos.

A) $\frac{a-b}{ab}$ B) $\frac{ab}{a-b}$ C) $\frac{a+b}{ab}$

D) $\frac{ab}{a+b}$ E) $\frac{b-a}{ab}$

$CS=\{\alpha+m\,;\,\beta+m\}$ M: Cantidad aprendida.

Por dato: $\alpha+m=-(\beta+m)$

$\alpha+m+\beta+m=0$

$\alpha+\beta+2m=0$

$-\frac{2ab}{a-b}+2m=0$

$2m=\frac{2ab}{a-b}$ $\therefore m=\frac{ab}{a-b}$

SOLUCIÓN:

$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)x^2+2(a+b)x+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1=0$; $CS=\{\alpha;\beta\}$

Cardano: $\alpha+\beta=\frac{-2(a+b)}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}=\frac{-2(a+b)}{\frac{a^2-b^2}{ab}}=\frac{-2\cancel{(a+b)}ab}{\cancel{(a+b)}(a-b)}=\frac{-2ab}{a-b}$

11. Dada la ecuación cuadrática en x $2x^2+2(a+1)x+(a^2-1)=0$ si la ecuación tiene 2 raíces iguales, determine dicha raíz. Considere $a > 0$.

A) 3 B) −2 C) −1
D) 4 E) 2

Solución. $a>0$

$2x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$; $CS=\{\alpha\}$

se cumple: $\Delta=0$

$[2(a+1)]^2-4(2)(a^2-1)=0$

$\cancel{4}^{1}(a^2+2a+1)=\cancel{8}^{2}(a^2-1)$

$a^2+2a+1=2a^2-2$

$0=a^2-2a-3$

$a \quad -3$
$a \quad 1$

$\boxed{a=3} \vee \cancel{a=-1}$

Reemp:

$2x^2+8x+8=0$

$x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$

$x=-2$

12. Si las ecuaciones polinomiales de incógnita x

$$\begin{cases} x^2+2x+k=0 & CS=\{\alpha\} \rightarrow \Delta=0 \\ \dfrac{x}{k+3}-\dfrac{3x}{5}=m & ;\ CS=\{\alpha\} \end{cases}$$

son equivalentes, determine el valor de m.

A) $-\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{3}{5}$ C) $-\dfrac{5}{4}$

D) $\dfrac{7}{20}$ E) $-\dfrac{7}{20}$

Solución:

En la cuadrática se cumple: $\Delta=0$

$$2^2-4(1)(K)=0 \rightarrow \boxed{K=1}$$

Luego: $x^2+2x+1=0$

$$(x+1)^2=0 \Rightarrow CS=\{-1\}=\{\alpha\}$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha=-1}$$

En la ecuación lineal:

$$\frac{x}{1+3}-\frac{3x}{5}=m$$

$$\frac{x}{4}-\frac{3x}{5}=m$$

$$\frac{5x-12x}{20}=m$$

$$-\frac{7x}{20}=m$$

$$x=-\frac{20m}{7}$$

$$CS=\left\{-\frac{20m}{7}\right\}=\{-1\}$$

$$\therefore\ m=7/20$$

Si las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, son m y n entonces, halle otra ecuación cuadrática cuyas raíces sean (m+n) y mn

A) $a^2x^2+a(b-c)x-bc=0$

B) $a^2x^2+a(a-c)x-bc=0$

C) $a^2x^2+a(b-c)x-bc=0$

D) $a^2x^2+b(b-a)x-ac=0$

E) $a^2x^2+a(b+c)x+bc=0$

SOLUCIÓN:

- $ax^2+bx+c=0$; $CS=\{m;n\}$

Cardano:

$m+n=-\frac{b}{a} \wedge mn=\frac{c}{a}$

- $CS=\{m+n\ ;\ mn\}$

$S=m+n+mn=-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}$

$P=(m+n)mn=\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)=-\frac{bc}{a^2}$

Luego: $x^2-Sx+P=0$

$x^2-\left(\frac{-b+c}{a}\right)x+\left(-\frac{bc}{a^2}\right)=0$

$\rightarrow a^2x^2+a(b-c)x-bc=0$

13 Dada la ecuación $x^3-4x^2+ax-8=0$ de raíces x_1, x_2 y x_3, tal que $x_1+x_2=2$, calcule el valor de a.

A) 8 B) 0 C) 4
D) –1 E) 2

14. Dada la ecuación

$$2x^3 - \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + 1332 = 0$$

de raíces a; b; c, indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto a las siguientes proposiciones.

I. $a + b + c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

II. $ab + bc + ac = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$

III. $(abc)(a + b + c)\sqrt{2} = -666$

A) VFF
B) FFF
C) VVF
D) VVV
E) VFV

ECUACIONES

15. Si α, β y θ son las raíces de la ecuación cúbica $ax^3+bx^2+5x-20=0$, determine el valor de E.

$$E=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\theta}$$

A) 4 B) 2 C) 100
D) 1/2 E) 1/4

16. Si $x^3+bx+c=0$ es una ecuación cúbica de raíces x_1; x_2 y x_3, determine el valor de L.

$$L=\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

A) c/b B) $-3c/b$ C) $3c/2b$
D) $-c/b$ E) b/c

ECUACIONES

17. Respecto a las raíces del polinomio
$P_{(x)}=x^4-2x^3+3x^2-4x+5$,
marque la alternativa correcta.

A) No tiene raíces negativas.
B) Solo tiene dos raíces negativas.
C) Tiene cuatro raíces negativas.
D) Solo tiene tres raíces negativas.
E) Solo tiene una raíz negativa.

18. Se sabe que las raíces de la ecuación $x^3-12x^2+rx-28=0$ están en progresión aritmética. Halle el valor de r.

A) 20 B) 24 C) 39
D) 16 E) -20

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS